Análise e simulação de modelos matemáticos para o sistema predador-presa

Iris Gobato Gercov [a*], Alfredo Del Sole Lordelo [a]

Palavras-chave: controle biológico, dinâmica populacional, efeito switching

Título abreviado: Análise de modelos predador-presa

ABSTRACT

The motivation for this Project was the mathematical and computational approach on a wide variety of problems involving ecology. A variation of the predator-prey system that was addressed includes the switching effect in a system of two trophic levels, formed by one species of predator and two species of prey. This effect is the shift in preference of a polyphagous predator by a species of prey when another becomes scarce in the environment.

The dynamic behaviour of mathematical models for systems of the type predator-prey described by differential equations was analyzed. For that, beyond the analytical study, were also made computer simulations in order to verify the efficiency of models and validity of the results based on the scientific literature.

The switching effect exercises stabilizing influence to the system. At the model including only harmful agents, one of the species is necessarily extinguished and the prey may even have its number increased. The combination of both, harmful agents and switching effect, brings stability to the system plus a shorter time until stability.

The results indicate that the use of harmful agents doesn't always take the system to what was expected at first. Also, the adding of the switching effect on the model brings it closer to reality. Better previews on population's numbers require the modeling as complete as possible, including all effects and using the right parameters, which must be determined through experimentation.

[a] Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas (CECS), Universidade Federal do ABC, Rua Santa Adélia, 166, Santo André, Brasil. secretariacecs@ufabc.edu.br
[*] Autor para a correspondência: +55 11 73269005. i.r1s@hotmail.com

RESUMO

A motivação para este Projeto foi a abordagem matemática e computacional de uma grande diversidade de problemas envolvendo ecologia. Uma variação para o sistema predador-presa que foi abordada inclui o efeito *switching* em um sistema de dois níveis tróficos, formado por uma espécie de predador e duas espécies de presas. Este efeito trata do deslocamento da preferência de um predador polífago por uma determinada espécie de presa quando uma outra se torna escassa no meio ambiente.

Foram analisados os comportamentos dinâmicos de modelos matemáticos para sistemas do tipo predador-presa descritos através de equações diferenciais. Para isso, além do estudo analítico, também foram feitas simulações computacionais, de forma a verificar a eficiência dos modelos e a validade dos resultados com base na literatura científica.

O efeito switching exerce influência estabilizadora ao sistema. No modelo incluindo apenas agentes nocivos, uma das espécies é necessariamente extinta e a presa pode até ter seu número elevado. A combinação de ambos, agentes nocivos e efeito switching, traz estabilidade ao sistema e um menor tempo até a estabilização.

Os resultados indicam que o uso de agentes nocivos nem sempre leva o sistema ao que se esperava inicialmente. Além disso, a adição do efeito switching no modelo o aproxima da realidade. Melhores previsões nos números das populações requerem modelagem tão completa quanto possível, incluindo todos os efeitos e usando os parâmetros corretos, que devem ser determinados experimentalmente.

INTRODUÇÃO

Muitos modelos de controle de pragas na agricultura são baseados em inseticidas químicos, cujas desvantagens podem ser: a redução da eficiência devido à resistência adquirida com uso intenso; danos causados aos inimigos naturais destes insetos; redução da eficiência do controle natural pela diminuição de hospedeiros; reaparecimento das pragas e surgimento de novas pragas diretas e secundárias; presença de resíduos de inseticidas nos alimentos; acidentes ambientais e alta persistência no ambiente; acidentes causados por intoxicação que podem resultar em doenças graves ou até na morte do agricultor.

Uma aplicação importante de modelagem matemática de sistemas dinâmicos populacionais é o controle biológico de pragas, onde os predadores são criados em laboratório para serem lançados na lavoura de maneira que se estabeleça um sistema predador-presa estável, cujo objetivo é manter a população de pragas abaixo de um nível que cause danos econômicos. Geralmente, o controle biológico de pragas é utilizado em conjunto com outros métodos, tais como a aplicação adequada de inseticidas de baixa persistência no meio ambiente e em variedades de plantas que tenham maior resistência ao ataque de pragas, ou seja, dentro de um manejo integrado de pragas, cujo objetivo é reduzir a degradação do meio ambiente e aumentar a produtividade e a qualidade da lavoura.

Para que se alcance sucesso, é fundamental que se conheçam o ciclo biológico e a dinâmica populacional do predador e da presa.

METODOLOGIA

Inicialmente, foi realizado estudo dos modelos básicos de dinâmica populacional em literatura científica. Incluem-se nesse estudo a leitura da teoria de cada modelo, para compreensão das hipóteses, e análise matemática, prevendo o comportamento de cada modelo com base em sua equação característica.

Depois de compreendidos e analisados os modelos, foram realizadas simulações dos mesmos, sendo utilizado para tanto o software MATLAB. As simulações foram feitas a partir das respectivas equações diferenciais de cada modelo (função ode23), e de parâmetros aleatórios, tendo como objetivo a verificação do comportamento dos modelos no tempo, a partir dos gráficos gerados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Introdução à dinâmica populacional

Em um trabalho seminal, o economista britânico Thomas Robert Malthus (1766-1834) argumentou que a forma apropriada para a variação da população, pelo menos quando esta fosse pequena, deveria ser um múltiplo constante da própria população (Zill & Cullen, 2006): $dy/dt=ry$, na qual a constante r é chamada *taxa de crescimento ou declínio*, dependendo se é positiva ou negativa. Esse modelo matemático (*crescimento exponencial*), com $r>0$, prevê que a população crescerá exponencialmente sempre. Sob condições ideais, observou-se que é razoavelmente preciso para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. No entanto, é claro que tais condições ideais não podem perdurar indefinidamente; pois as limitações sobre o espaço, o suprimento de comida ou outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e acabará inibindo o crescimento exponencial (Boyce & Diprima, 2005).

Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento depende da população, Pierre-Francois Verhulst (1804-1849), matemático e biólogo belga, introduziu a *equação logística*: $dy/dt=r(1-y/K)y$, na qual a constante r é chamada de *taxa de crescimento intrínseco*, isto é, na ausência de qualquer fator limitador e K é a *capacidade de suporte* do meio ambiente, ou seja, um determinado ambiente é capaz de sustentar não mais do que um número fixo K de indivíduos de dada espécie em sua população (Boyce & Diprima, 2005).

As populações de algumas espécies exibem o fenômeno de limiar. Se presente em quantidade muito pequena, a espécie não pode se propagar com sucesso e a população extingue-se. No entanto, se for possível juntar uma população maior do que o limiar crítico, então ocorre crescimento ainda maior.

Para incluir o *limiar crítico*, é introduzido um outro fator que tem o efeito de tornar dy/dt negativo quando y for grande: $dy/dt=-r(1-y/T)(1-y/K)y$, na qual T é um *limiar crítico* abaixo do qual não existe crescimento. Se y começa abaixo do limiar T, então y decresce até chegar à extinção. Por outro lado, se y começa acima de T, então y acaba se aproximando, finalmente, da capacidade de sustentação K.

É desejável desenvolver uma estratégia que possibilite extrair o máximo possível das *fontes naturais renováveis* e ainda assim não reduzi-las a um nível abaixo do sustentável. Sem a intervenção humana, supomos que a população comportar-se-ia logisticamente e que o recurso natural explorado é constituído por indivíduos de uma população animal.

Para uma *taxa de exploração constante h*, o valor $h=rK/4$ é chamado de *produção máxima sustentável* (PMS). Prevê a possibilidade de uma população constante de $y_1=K/2$ e uma exploração constante igual à PMS. A PMS, em outras palavras, é igual à população acrescentada anualmente em decorrência da reprodução menos as mortes.

Supondo *exploração proporcional ao tamanho da população*, a exploração de equilíbrio ou *produção sustentável*, é $Ey_1=KE(1-E/r)$, na qual $E>0$ é uma constante denominada *esforço*, uma vez que é medida do desgaste de explorar o recurso na fonte. A população-limite quando $t \to \infty$ é $K(1-E/r)$ (Zill, 2003).

Dinâmica populacional do sistema predador-presa

Vamos investigar a situação em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Um modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem na natureza. Apesar disso, o estudo de modelos simples é o primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complicados. Vamos denotar por x e y as populações, respectivamente, da presa e do predador, em um instante t. Ao construir a interação de duas espécies, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual;
2. Na ausência da presa, o predador é extinto;
3. O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas.

Em conseqüência dessas hipóteses, somos levados às equações $dx/dt=ax-\alpha xy=x(a-\alpha y)$, e $dy/dt=-cy+\gamma xy=y(-c+\gamma x)$. As constantes a, c, α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e a taxa de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies. Essas equações são chamadas de equações de *Lotka-Volterra*. Elas foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka, um biofísico ucraniano, em 1925, e por Volterra, matemático italiano, em 1926.

O modelo de *Lotka-Volterra* revelou uma variação cíclica que talvez pudesse ter sido antecipada. Por outro lado, a aplicação desse modelo em outras situações pode levar a conclusões que não são intuitivamente óbvias. Por exemplo, a necessidade de cautela ao se usar inseticidas. A Figura 1 mostra a dependência de x e y em t para um conjunto típico de condições iniciais, com $a=1$, $c=0,75$, $\alpha=0,5$ e $\gamma=0,25$.

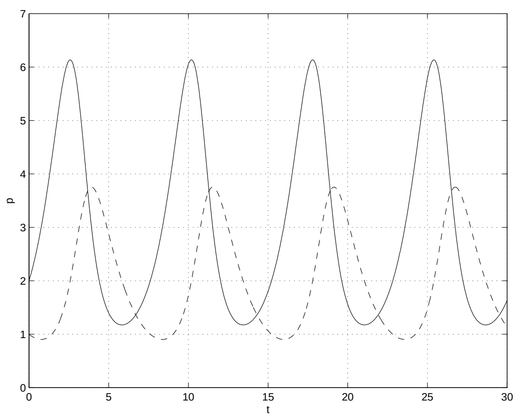


Figura 1. População de presas (contínuo) e predadores (tracejado) em função do tempo para o modelo de *Lotka-Volterra*.

Uma crítica das equações de *Lotka-Volterra* é que, na ausência de predadores, a população de presas aumenta sem limites. As equações a seguir demonstram a *correção logística* ao modelo: $dx/dt=ax-\varepsilon x^2-\alpha xy$ e $dy/dt=-cy+\gamma xy$. A conseqüência mais importante dessa modificação é que o ponto crítico torna-se um ponto assintoticamente estável, ou seja, as trajetórias se aproximam do ponto crítico quanto $t\rightarrow\infty$ (Boyce & Diprima, 2005). Tais resultados podem ser verificados na figura 2, onde foram utilizados os mesmos valores da figura 1, com $\varepsilon=0.1$ e valores iniciais de *1* para presas e *3* para predadores.

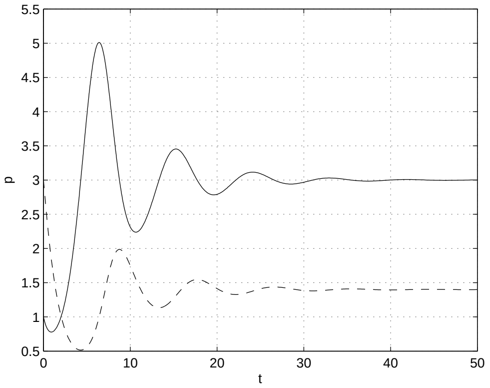


Figura 2. População de presas (contínuo) e predadores (tracejado) em função do tempo para o modelo de *Lotka-Volterra* com incorporação do modelo logístico.

Suponha que se empregue um inseticida com o objetivo de reduzir a população de insetos e que este inseticida também seja tóxico para os predadores, matando-os a taxas proporcionais às respectivas populações. Esta situação pode ser modelada matematicamente através das equações a seguir, na qual β e δ são constantes estritamente positivas: $dx/dt= ax-\varepsilon x^2-\alpha xy-\beta x$ e $dy/dt=-cy+\gamma xy-\delta y$. A seguir é apresentado um exemplo de simulação com os seguintes valores para os parâmetros: $a=1$, $\alpha=0{,}025$, $c=1{,}2$, $\gamma=0{,}024$, $\varepsilon=0{,}005$, $\beta=0{,}3$ e $\delta=0{,}1$.

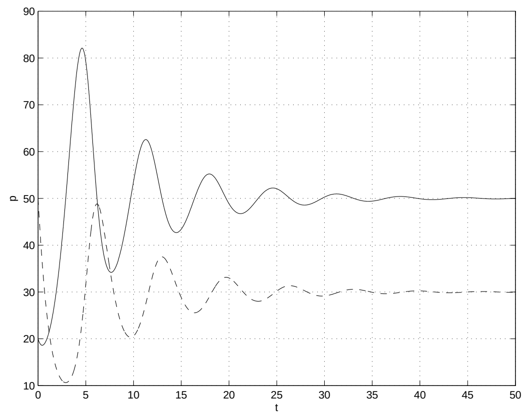
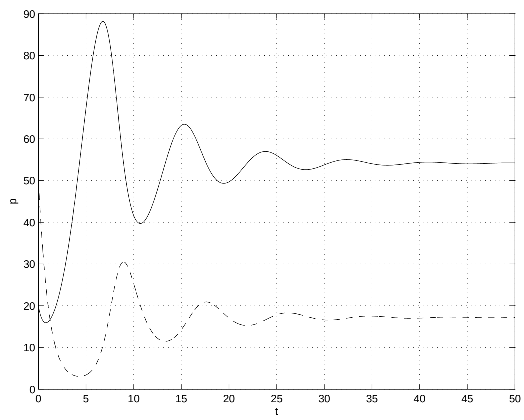


Figura 3. (à esquerda) Populações de presas (contínuo) e predadores (tracejado) em função do tempo sem uso de inseticida.

Figura 4. (à direita) Populações de presas (contínuo) e predadores (tracejado) em função do tempo com uso de inseticida.



Analisando os resultados das simulações, verificou-se que, para os parâmetros selecionados, o equilíbrio da população de presas aumenta e o da população de predadores diminui! Conclui-se que o agente nocivo só terá o efeito desejado de diminuir a população de presas na ausência de predadores, caso contrário, a aplicação do inseticida, mesmo sendo mais tóxico à presa do que ao predador, levará a um resultado contrário ao desejado. Um fato importante a considerar é a simplicidade do modelo abordado, frente às complexas relações ecológicas que ocorrem no meio ambiente. Desta forma, seria uma ação simplista proibir o uso de inseticida levando em conta os resultados aqui expostos, porém, fica demonstrado que tal fato deve ser considerado na situação apresentada (Lordelo & de Castro Junior, 2006).

Dinâmica populacional de sistemas complexos

Uma das linhas de estudo das interações de populações do tipo presa-predador considera o fato de alguns predadores polífagos deslocarem sua preferência para determinada presa, dependendo da freqüência relativa desta. Um predador que se alimenta de várias espécies de presa não ataca todas elas indiscriminadamente. Quando um tipo de presa torna-se escasso no meio, o predador pode parar de procurar por esta espécie totalmente e começar a caçar outra espécie mais abundante. Este comportamento do predador é conhecido como *switching*, ou deslocamento da preferência do predador para um determinado tipo de presa. Estes e outros estudos realizados com o *efeito switching do predador* mostraram que este pode estabilizar o sistema como um todo e garantir a co-existência e competição permanentes das espécies.

Consideramos uma população com dois níveis tróficos e três espécies: duas presas e um predador. Portanto, consideramos um crescimento logístico para as presas, modificamos a função de densidade do predador e incluímos um efeito *switching* usando as funções de *Tansky* na sua forma geral.

Consideramos as duas primeiras espécies como sendo as presas, x_1 e x_2, e a última espécie como sendo a do predador, x_3. Partimos do suposto de que não há competição entre as presas e que elas não interagem com presas de outras espécies. O problema é formulado através de dois modelos. O primeiro modelo será formulado sem considerar o *switching* do predador e no segundo modelo o *switching* será incluído. O modelo sem o *switching* do predador é o modelo clássico de *Lotka-Volterra* dado pelo sistema:

$dx_1/dt=(r_1-r_1x_1/k_1-a_1x_3)x_1,$

$dx_2/dt=(r_2-r_2x_2/k_2-a_2x_3)x_2,$

$dx_3/dt=(-r_3+c_1a_1x_1+c_2a_2x_2)x_3.$

No modelo, r_i é a taxa de crescimento intrínseco da presa i, ($i=1,2$); k_i é a capacidade de suporte do meio para a presa i, ($i=1,2$); r_3 é a taxa de mortalidade do predador, a_i é o coeficiente da eficiência de procura do predador em relação à presa i, ($i=1,2$), e c_i é a resposta numérica (taxa de reprodução) do predador ao consumir a presa i, ($i=1,2$). Todos estes valores utilizados são considerados constantes.

O modelo com *switching* é descrito pelo sistema:

$dx_1/dt=[r_1-r_1x_1/k_1-a_1x_1^nx_3/(x_1^n+x_2^n)]x_1,$

$dx_2/dt=[r_2-r_2x_2/k_2- a_2x_2^nx_3/(x_1^n+x_2^n)]x_2,$

$dx_3/dt=[-r_3+c_1a_1x_1^{n+1}/(x_1^n+x_2^n)+c_2a_2x_2^{n+1}/(x_1^n+x_2^n)]x_3.$

Toda vez que o predador se alimenta de alguma presa, a taxa de crescimento da população do predador e a taxa de mortalidade da presa escolhida são modificados pelo mesmo fator, assim os termos de interação relativa aparecem em ambos os sistemas, sem e com *switching*.

Simulando e comparando os modelos dados nos dois sistemas, para diversos valores de n e o mesmo conjunto de parâmetros, pôde-se observar a influência estabilizadora do efeito *switching* do predador. Nas simulações a seguir foram utilizados os seguintes parâmetros: $r_1=0.9$, $r_2=1.5$, $r_3=1.0$, $k_1=k_2=5000$, $a_1=0.2$, $a_2=0.5$, $c_1=c_2=0.5$, sendo o ponto de coexistência: $x_1^*=7.93$, $x_2^*=5.29$, $x_3^*=7{,}52$. Finalmente, foram utilizados os valores iniciais $(2,3,1)$ e 200 unidades de tempo de simulação.

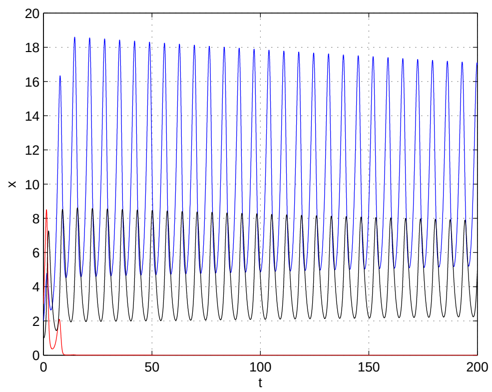


Figura 5. (à esquerda) Populações de presas (1 azul e 2 vermelho) e predadores (preto) em função do tempo sem efeito *switching*.

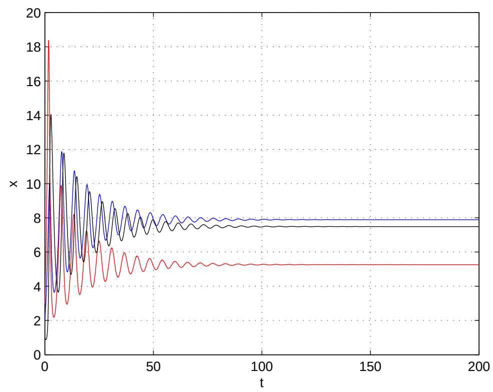


Figura 6. (à direita) Populações de presas (1 azul e 2 vermelho) e predadores (preto) em função do tempo com efeito *switching* ($n=1$).

Considerando-se o modelo presa-predador sem incluir o efeito *switching* do predador, observou-se que, para diferentes conjuntos de parâmetros, sempre uma das espécies de presa vai à extinção. Entretanto, se incluímos as funções *switching* no modelo, as trajetórias convergem assintoticamente para o seu ponto de equilíbrio. Quanto maior o valor de n mais rápida a convergência do sistema para o seu ponto de equilíbrio. Portanto, podemos concluir que ao considerarmos o caso geral do *switching* do predador estabilizamos o sistema como um todo garantindo a co-existência permanente das espécies (Palomino-Bean et al., 2006).

No intuito de aprimoração do modelo, utilizaremos o sistema de *Lotka-Volterra* logístico, com efeito *switching* e agente nocivo às espécies, englobando em uma única simulação todos os pontos fundamentais da dinâmica populacional estudados aqui. Esse modelo é representado pelo sistema:

$dx_1/dt=[r_1-r_1x_1/k_1-a_1x_1^nx_3/(x_1^n+x_2^n)-\beta_1]x_1,$

$dx_2/dt=[r_2-r_2x_2/k_2- a_2x_2^nx_3/(x_1^n+x_2^n)-\beta_2]x_2,$

$dx_3/dt=[-r_3+c_1a_1x_1^{n+1}/(x_1^n+x_2^n)+c_2a_2x_2^{n+1}/(x_1^n+x_2^n)-\beta_3]x_3.$

No qual r_i é a taxa de crescimento intrínseco da presa i, ($i=1,2$); k_i é a capacidade de suporte do meio para a presa i, ($i=1,2$); r_3 é a taxa de mortalidade do predador; a_i é o coeficiente da eficiência de procura do predador em relação à presa i, ($i=1,2$); c_i é a resposta numérica (taxa de reprodução) do predador ao consumir a presa i, ($i=1,2$); e β_i é a taxa de mortalidade devido ao inseticida. Todos estes valores utilizados são considerados constantes.

Nas simulações a seguir foram utilizados os seguintes parâmetros: $r_1=0.9$, $r_2=1.5$, $r_3=1.0$, $k_1=k_2=5000$, $a_1=0.2$, $a_2=0.5$, $c_1=c_2=0.5$, $n=1$, $x(0)=[2\ 3\ 1]$ (mesmos parâmetros das simulações da seção anterior) e *80* unidades de tempo de simulação. Os valores de β foram alterados, para que se verificasse a influência do agente nocivo no modelo.

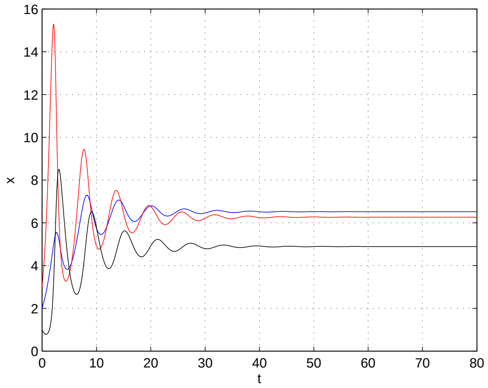


Figura 7. Populações de presas (1 azul e 2 vermelho) e predadores (preto) em função do tempo com efeito *switching* e agente nocivo (β_1=0,4; β_2=0,3; β_3=0,1).

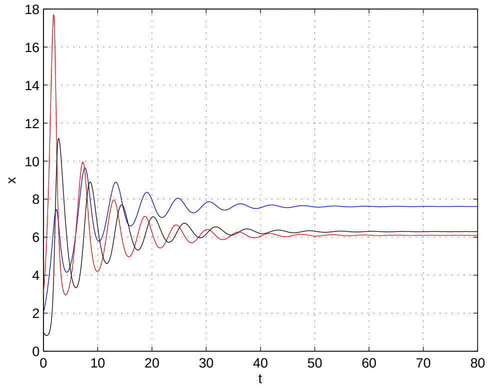


Figura 8. Populações de presas (1 azul e 2 vermelho) e predadores (preto) em função do tempo com efeito *switching* e agente nocivo (β_1=0,2; β_2=0,1; β_3=0,1).

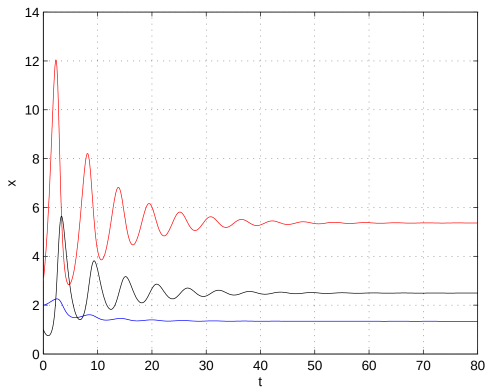


Figura 9. Populações de presas (1 azul e 2 vermelho) e predadores (preto) em função do tempo com efeito *switching* e agente nocivo (β_1=0,8; β_2=0,5; β_3=0,1).

As simulações para este sistema indicam que, com o agente nocivo, houve alteração no equilíbrio das populações. De modo geral, a população de predadores diminui e as de presas variam conforme os parâmetros do dano causado pelo agente nocivo: as populações menos afetadas aumentam e as mais afetadas diminuem. Além disso, o tempo decorrido até a estabilização do sistema diminui.

CONCLUSÕES

Analisando as simulações aqui expostas, conclui-se que a utilização de agente nocivo (inseticida) em conjunto com a dinâmica presa-predador nem sempre é recomendada, visto que em certas situações pode inclusive aumentar a população de presas (no caso, a praga). O efeito do agente nocivo nas populações influencia diretamente o efeito *switching*, já que altera a relação entre as populações de presas, mudando constantemente a preferência do predador.

Propõe-se a utilização sensata do controle biológico e de agentes nocivos, visto que os resultados podem variar do esperado à primeira vista. Sendo assim, é necessário bom conhecimento das espécies envolvidas, a fim de utilização dos parâmetros corretos e melhor previsão dos resultados obtidos com cada técnica, melhorando a produtividade e, muitas vezes, poupando o ambiente do uso de pesticidas. A utilização de modelos mais complexos, que envolvam mais agentes de influência sobre o sistema, permite uma análise mais realista da sua dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyce, WE & Diprima, RC. 2005. *Elementery Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons Inc., 8th edition.

Lordelo, ADS & de Castro Junior, AB. 2006. *Modelagem e simulação do sistema predador-presa sob a influência de agente nocivo*. III Simpósio de Ciências Aplicadas da FAIT.

Palomino-Bean, S, Vilcarromero, ACS, Fernandes, JFR & Bonato, O. 2006. Co-existência de espécies em sistemas presa-predador com switching. *Tendências* em *Matemática Aplicada e Computacional*, 7(2): 317-326.

Zill, DG & Cullen, MR. 2006. *Equações Diferenciais*. Pearson Makron Books.

Zill, DG. 2003. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. Thomson.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP pela bolsa de iniciação científica e à Universidade Federal do ABC - UFABC pelas condições propiciadas ao desenvolvimento deste projeto de pesquisa e pelo auxílio financeiro para participação neste evento.